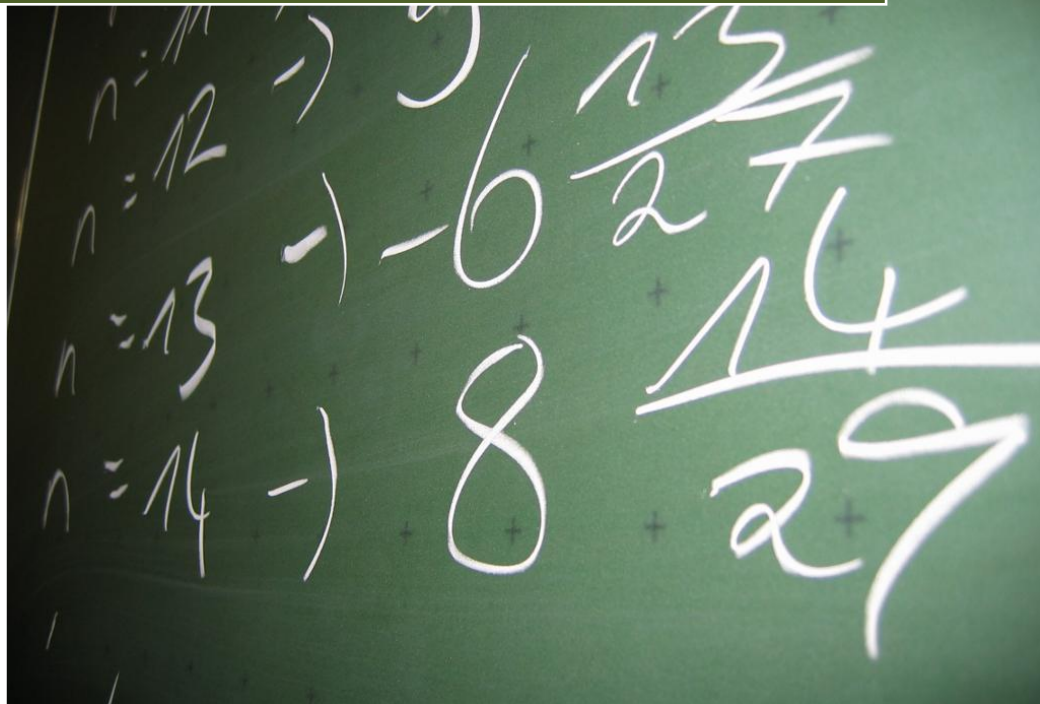


2010

Mathematik Zusammenfassung 3. Jahr Gymnasium



Autoren: Annen Philipp, Aydin Natascha,
Betschart Reto, Bissig Fabian, Deix Marco,
Eberle Sebastian, Heinzer Daniel,
Hirschbühl Sandro, Inderbitzin Anne, Jordi
Mirjam, Ngo Thanh-Cong, Richner Lea,
Schönbächler Sandro, Skrijelj Vreny,
Tanyeli Jonny, Wachter Daniel, Weber
Lukas, Weber Valentino, Yildiz Evgin, Zekaj
Edona (G4d)

Betreuer: Herr Bühlmann

Inhalt

Buchseiten beziehen sich auf „Elemente der Mathematik“, Schroedel

- 1** Folgen, Grenzwert, Stetigkeit
S. 44 - 68
- 2** Differenzial- und Integralrechnungen
S. 71 - 103
- 3** Funktionsuntersuchungen
S. 114 - 137
- 4** Funktionsscharen
S. 148 – 154
- 5** Produktregel
S. 155 – 174
- 6** Wirtschaft und Mathematik
Skript
- 7** Kombinatorik, Skalarprodukt
Skript
- 8** Vektoren und Geraden
S. 332 – 367
- 9** Parametergleichungen der Ebene
S. 377 – 400
- 10** Optimierungsaufgaben
S. 191 - 200
- 11** Extremwerte und Wendepunkte mit Hilfe einer Tabelle bestimmen
- 12** Allgemeine Merksätze

Folgen, Grenzwert, Stetigkeit usw. 46,48,54,59,63,68 etc.	
Differenzial- und Integralrechnung 71-73, 87, 91, 95, 103 etc.	
Funktionsuntersuchungen 114-120, 129, 132, 133, 134-137 etc.	
Funktionsscharen 150, 152, 153, 154 etc.	
Produktregel 157, 158, 162, 163 -166, 168-170, 173, 174 etc.	
Wirtschaft und Mathematik	
Kombinatorik, Skalarprodukt	
Vektoren und Geraden 332,336,339,343,344,348,349,354,363-367 etc.	
Parametergleichung der Ebene 377,381,385-394,397,399,400 etc.	
Optimierungsaufgaben 194 etc.	

Folgen & Grenzwerte

Definitionen

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
- Eine Folge ist eine eindeutige Zuordnung einer Menge natürlicher Zahlen in einer gegebenen Menge a .
- Ist $A = \mathbb{R}$ dann spricht man von einer Zahlenfolge.

Beispiele

- 1) $n \mapsto (\text{rechts, wenn } n \text{ gerade} / \text{links, wenn } n \text{ ungerade für } n \in \mathbb{N}^*)$
links (1), rechts (2), links (3), ... <- keine Zahlenfolge
- 2) $n \mapsto 2n-1 \quad n \in \mathbb{N}^*$
1, 3, 5, 7, .. <- Zahlenfolge

Definitionen

- Endliche Folgen sind Folgen mit einer endlichen Anzahl Gliedern.
z.B. 3, 4, 5, 9 (4 Glieder)
- Unendliche Folgen enthalten unendlich viele Glieder.

Schreibweise einer Zahlenfolge

$(a_n): n \mapsto a_n$ $\mathbb{N}$ wird auf das Glied der Folge a_n abgebildet.

Darstellungsarten

a) Wortdarstellung „jeder Zahl wird ihr doppelter Wert zugeordnet“

b) Tabellarische Darstellung

n	1	2	3	4
a_n	2	4	6	8

c) Funktionsgleichung $a_n = 2n$

d) rekursive Darstellung
 $a_1 = 2$
 $a_n = a_{n-1} + 2$

Beispiele

a) Folge der Quadratzahlen

$$a_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

b) Folge der Stammbrüche $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

c) Folge der Primzahlen $(2, 3, 5, 7, \dots)$

gibt es nicht!

d) Folge der Fibonacci-Zahlen $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

Definitionen

- Die Folge (a_n) heisst wachsend, falls $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$
- Die Folge (a_n) heisst fallend, falls $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$

Beispiel

Ist die Folge $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ wachsend oder ist sie fallend?

Berechne die ersten drei Glieder der Folge:

$$a_n = \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{5}$$

$$a_n = \frac{2 \cdot 3 - 1}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{5}{7}$$

→ Vermutung: (a_n) ist wachsend.

Beweis

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)+1} - \frac{2n-1}{2n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{2n+3} - \frac{2n-1}{2n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(2n+1)^2 - (2n-1)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4n^2 + 4n + 1 - (4n^2 + 6n - 2n - 3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 6n + 2n + 3}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4}{(2n+3)(2n+1)} > 0$$

Definitionen

Das Zeichen „für alle“ $\forall$

Das Zeichen „es gibt ein“ $\exists$

Das Zeichen „es gibt genau ein“ $\exists!$

Das Zeichen „es gibt kein“ $\nexists$

$\rightarrow$ (a_n) wachsend $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
 (a_n) fallend $\Leftrightarrow a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Arithmetische Folgen

Definition (a_n) arithmetisch $\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = d \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Beispiele

- 3, 8, 13, 18, ... $a_1 = 3, d = 5$
- 3, -1, -5, -9, ... $a_1 = 3, d = -4$

Satz

(a_n) AF dann gilt:

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d$

(2) $a_{n+1} = a_n + d$

(3) $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Summe der ersten n Glieder der AF

Beweis

(1)

a_1	a_2	a_3	a_n
d	d	d	d

von a_1 nach $a_2 \rightarrow +d$

von a_1 nach $a_3 \rightarrow +2d$

von a_1 nach $a_n \rightarrow +(n-1)d$

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Geometrische Folgen

$$(a_n) \text{ geometrisch} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Beispiele

- 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}, \dots$ $a_1 = 16, q = 0.5$
- Bestimme die ersten 7 Glieder einer GF mit $a_1 = \frac{1}{9}, q = -3$

Lösung: $\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3, 9, -27, 81$

Satz

(a_n) GF

$$(1) \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$(2) \quad a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$$(3) \quad S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Beweis

a_1	a_2	a_3	a_n
q	q	q	q

$$\begin{aligned} \text{von } a_1 \text{ nach } a_2 &\rightarrow \cdot q \\ \text{von } a_1 \text{ nach } a_3 &\rightarrow \cdot q^2 \\ \text{von } a_1 \text{ nach } a_n &\rightarrow \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \\ (-)qS_n &= a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \\ \hline S_n - qS_n &= a_1q - a_1q^n \\ S_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Grenzwerte Geometrischer Folgen

Beispiel 1

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad q = 0,5$$

$$a_n = 1 \cdot (0,5)^{n-1}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ dann } a_n \rightarrow 0$$

“Kommt der Zahl 0 beliebig nahe”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0,5^{n-1} = 0$$

Beispiel 2

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

geometrische Interpretation

1	$\frac{1}{2}$		
	$\frac{1}{4}$	...	
		...	...

Ganzer Kasten = 2

Durch halbieren erhält man eigentlich nie 2
→ Grenzwert

Satz

(a_n) GF, dann gilt:

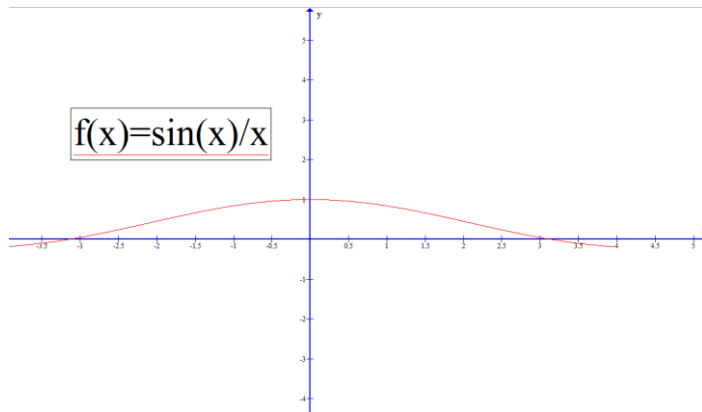
$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ falls } |q| < 1$$

$$(2) S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \\ = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{falls } |q| < 1$$

Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$DF = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$f(0)$ = „nicht definiert“
nicht stetig an der Stelle 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$f(x) = 1 - x^2$$

→ stetig an der Stelle 0!

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) = 1$$

Ist $f(x)$ an der Stelle X_0 stetig.

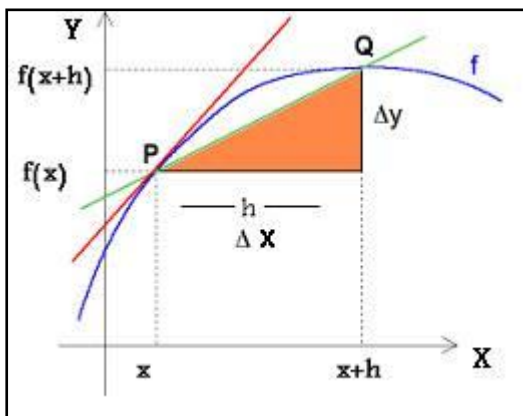
$$\rightarrow f(X_0) = \lim_{x \rightarrow X_0} f(x)$$

Differential –und Integralrechnung

Differentialrechnung

Der zentrale Schwerpunkt bei der Differentialrechnung liegt in der Berechnung von Veränderungen lokaler Funktionen.

Das Tangentenproblem



Im gezeigten Bild ist eine Funktion f gegeben, die im Punkt P einmal von einer Sekante geschnitten und von einer Tangente tangiert wird. Die Steigung der Sekante (Dreieck) ist einfach auszurechnen, wenn die Funktionsbeschreibung, und zugleich die Punkte x und $x+h$ auf der X-Achse bekannt sind.

$$\Delta x = (x+h) - x$$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

Die Steigung der Tangente:

$$\lim_{(x+h) \rightarrow x} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

Definitionen

Unter der **Ableitung einer Funktion f an der Stelle a** , versteht man die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(a | f(a))$. Diese Ableitung wird kurz mit $f'(a)$ bezeichnet.

Beispiel: Eine Funktion hat an der Stelle 3 die Steigung 6 $\rightarrow f'(3)=6$.

Unter der Ableitungsfunktion $f'(x)$ der Ausgangsfunktion $f(x)$ versteht man diejenige Funktion, welche an jeder Stelle x , an welcher f differenzierbar ist, die Ableitung von f zuordnet.

Es gilt also:
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Die Ableitung f'' ist die Ableitung der Funktion f' , die Ableitung f''' wiederum die Ableitung der Funktion f'' .

Höhere Ableitungen

$$f(x) = 3x^4 + 2x$$

$$f'(x) = 12x^3 + 2$$

$$f''(x) = 36x^2$$

$$f'''(x) = 72x$$

$$f^{(4)}(x) = 72$$

$$f^{(5)}(x) = 0$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

$$f'''(x) = -\cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

Ableitungsregeln:

Potenzregel: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n * x^{n-1}$

Faktorregel: $f(x) = c * g(x) \rightarrow f'(x) = c * g'(x)$

Summenregel: $f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Was man zusätzlich wissen sollte:

- Bei einem Knick im Graph kann keine eindeutige Tangente sein!
- Stetig heisst, ich kann die Kurve ohne absetzen zeichnen.
- Differenzierbar heisst, es ist möglich die Tangente einzuzeichnen.
- Grenzwert ist Steigung der Tangente.

Was man können sollte:

- Steigung einer Funktion grafisch bestimmen
- Tangentenproblem
- Ableitungsregeln
- Höhere Ableitungen
- Sinus und Cosinus
- Hochpunkte, Tiefpunkte, Wendepunkte

Integral

Die Integralfunktion beschreibt die Fläche unter einer Funktion f.

Das Flächenproblem des Archimedes

Untersumme

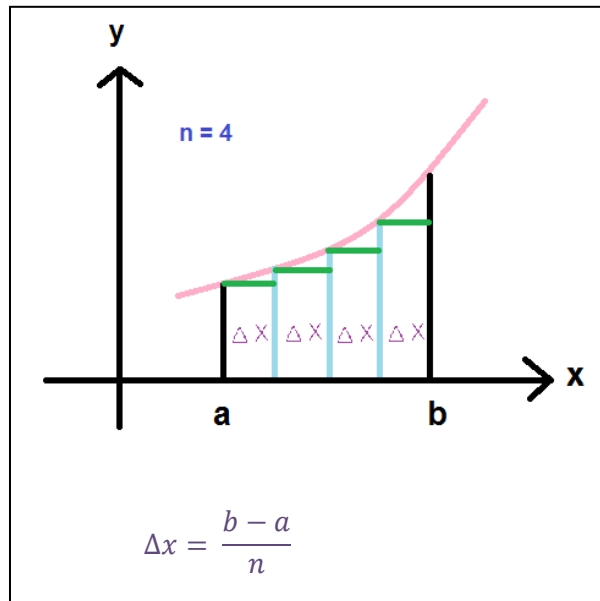
$$U_4 = f(a) * \Delta x + f(a + \Delta x) * \Delta x + f(a + 2\Delta x) * \Delta x + f(a + 3\Delta x) * \Delta x$$

$$U_4 = \sum_{i=0}^3 f(a + i\Delta x) * \Delta x$$

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\Delta x) * \Delta x$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\Delta x) * \Delta x$$

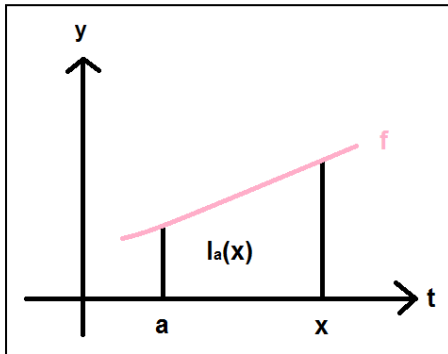
$$A = \int_b^a f(x) dx$$



Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

Definition der Integralfunktion von $f(x)$

$$I_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$



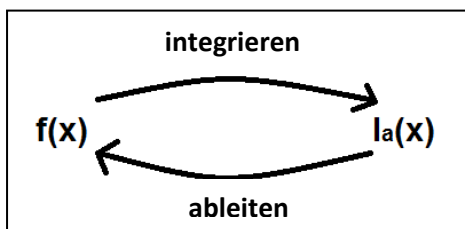
Beispiel: $f(x)=x^2$

$$I_a(x) = \int_a^x t^2 dt$$

$$I_a(x) = \int_0^x t^2 dt - \int_0^a t^2 dt$$

$$I_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}a^3$$

$$\text{Es gilt: } I_a'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}a^3 \right)' = x^2 = f(x)$$



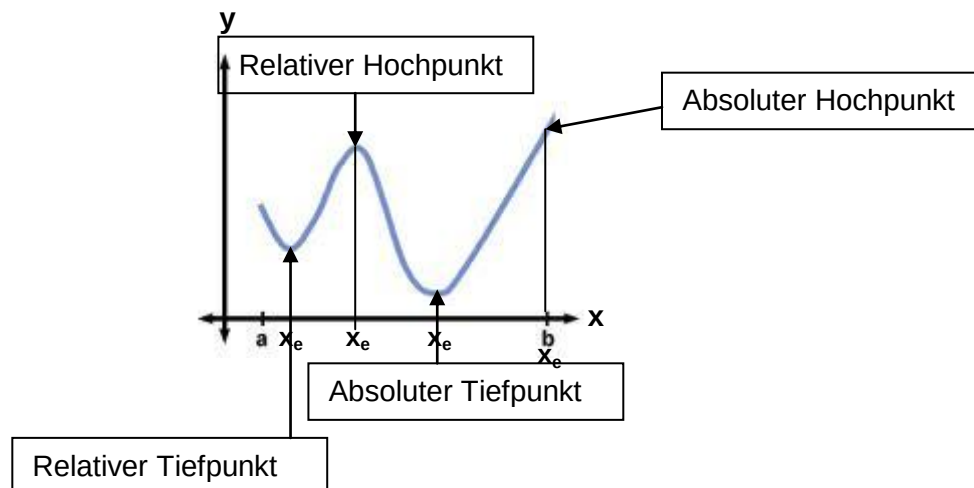
Umkehroperation

Bildet man die Ableitung der Integralfunktion I_a mit $I_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ so erhält man die Integralfunktion f , d.h. es gilt: $I_a'(x) = f(x)$

Definition: $F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$

Funktionsuntersuchungen

Funktionen verfügen in den meisten Fällen über einen Hoch- und einen Tiefpunkt. Anhand des Graphen sind diese Extremwerte gut sichtbar:



Minimum oder Maximum wird der Funktionswert an der Stelle x_e bezeichnet.

Ein relatives Minimum bedeutet, dass die Werte für $f(x)$ links und rechts vom Punkt x_e grösser sind als $f(x_e)$. Allerdings nur für die Werte für x von einer bestimmten Umgebung, welche komplett im Definitionsbereich D_f liegt. Für ein relatives Maximum gilt analog dazu, dass die Werte für $f(x)$ kleiner sind als jene von $f(x_e)$.

Ein absolutes Minimum hingegen bedeutet, dass $f(x_e)$ kleiner ist als alle $f(x)$ von D_f . Ein absolutes Maximum bedeutet wiederum, dass $f(x_e)$ grösser ist als alle $f(x)$ von D_f .

Befindet sich an einem Punkt ein Maximum oder Minimum, nennt man den dazugehörigen Wert für x_e Extremstelle. $f(x_e)$ heisst dann Extremum und der zugehörige Extrempunkt ist entweder ein Tiefpunkt $T(x_e | f(x_e))$ oder ein Hochpunkt $H(x_e | f(x_e))$.

Wenn ein absolutes Extremum am Rand von D_f liegt, so wird es als Randextremum bezeichnet. Hier ist es der Fall beim absoluten Hochpunkt.

Die folgende Tabelle fasst die Definition kurz zusammen:

Absolutes Minimum	Absolutes Maximum
$f(x) \geq f(x_e)$ für alle $x \in D_f$	$f(x) \leq f(x_e)$ für alle $x \in D_f$
Relatives Minimum	Relatives Maximum
$f(x) \geq f(x_e)$ für alle $x \in U$	$f(x) \leq f(x_e)$ für alle $x \in U$

Wobei die Umgebung U ganz in D_f liegt.

Notwendiges Kriterium

Die Steigung einer Funktion ist bekanntlich deren 1. Ableitung. Somit muss $f'(x) = 0$ sein damit ein Extrempunkt vorhanden ist.

Doch dies ist nur ein notwendiges Kriterium. Man kann daraus nicht schliessen, ob es sich um einen Tief-, Hoch- oder Sattelpunkt handelt.

S. 117 (unten rechts)

S.118

Monotonie

Mit der Monotonie kann man ein Intervall einer Funktion beschreiben. Dabei gilt:

monoton wachsend	monoton fallend
DARSTELLUNG wie S.121	DARSTELLUNG wie S.121
Wenn $x_1 < x_2$ ist, dann ist $f(x_1) \leq f(x_2)$	Wenn $x_1 > x_2$ ist, dann ist $f(x_1) \geq f(x_2)$

Wenn sogar gilt das $f(x_1) < f(x_2)$, resp. $f(x_1) > f(x_2)$, gilt dann spricht man von **streng** monoton wachsend oder fallend.

Hinreichendes Kriterium

Mit Hilfe des ersten Kriterium $f'(x) = 0$ zwar festgestellt werden, ob es möglich ist, dass an der Stelle x ein Extremwert ist. Aber erst mit dem hinreichenden Kriterium kann man feststellen, ob es sich um einen Tief-, Hoch- oder Sattelpunkt handelt. Dafür wird die 2. Ableitung gebildet. Ist $f''(x) < 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x einen relativen Hochpunkt. Ist $f''(x) > 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x einen relativen Tiefpunkt. Ist $f''(x) = 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x einen Sattelpunkt.

Tiefpunkt:	$f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$
Hochpunkt:	$f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$
Sattelpunkt:	$f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$

Linkskurve, Rechtskurve – Wendepunkt

Ein Graph kann links- oder rechtsgekrümmt sein. Man spricht dann auch von einer Links- oder Rechtskurve.

DIAGRAMM S. 134	DIAGRAMM S. 134
$f'(x)$ ist streng monoton wachsend	$f'(x)$ ist streng monoton fallend

Das hinreichende Kriterium für einen Links- oder Rechtskurve mittels der Ableitung:

$f''(x) > 0 \rightarrow$ Linkskurve

$f''(x) < 0 \rightarrow$ Rechtskurve

$f''(x) = 0$ ist der Punkt zwischen einer Links- und Rechtskurve und wird deswegen als Wendepunkt bezeichnet.

Funktionenscharen

Erklärung

Funktionenscharen (auch *Funktionsscharen* genannt) sind Funktionen, die sich im Parameter k unterscheiden. Sie werden bei Grössen y , die von mehreren Variablen $x_1, x_2, x_3 \dots$ abhängig sind, verwendet. So ist die Druckveränderung eines Gases bei Volumenveränderung nicht nur vom Volumen, sondern auch von der Temperatur abhängig. Wähle ich die Temperatur $t_1 = 100^\circ\text{C}$ so ergibt sich eine andere Funktion als bei $t_2 = -10^\circ\text{C}$

- Zum Beispiel: Druckveränderung des Gases bei konstanter Temperatur bei Veränderung des Volumens: $f_k(x) = x^3 - k \cdot x$
- Der Parameter k kann jede beliebige Zahl sein, egal ob $\sqrt{5}$ oder 100. Im Beispiel soll er die Temperatur darstellen. Er wird auch in der Funktion vermerkt: $f_{10}(x) = x^3 - 10 \cdot x$

Definition: Funktionenschar

Wenn ein Funktionsterm neben der Funktionsvariablen noch einen Parameter k enthält, dann gehört zu jedem zulässigen Parameterwert k eine Funktion f_k .

Die Menge aller Funktionen f_k heisst **Funktionenschar**.

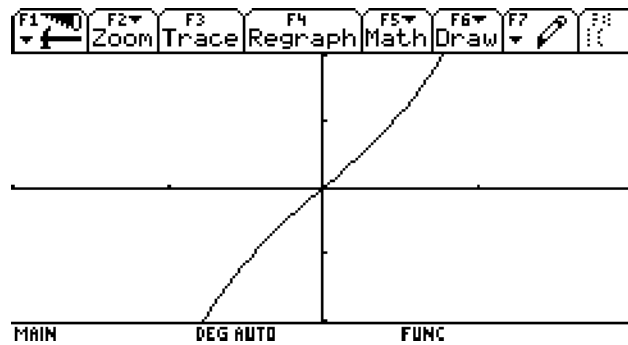
Der Graph, auf dem die Extrempunkte (Wendepunkte) aller Funktionen f_k Funktionenschar liegen, heisst **Ortslinie** der Extrempunkte (Wendepunkte) Funktionen f_k

Beispielrechnung

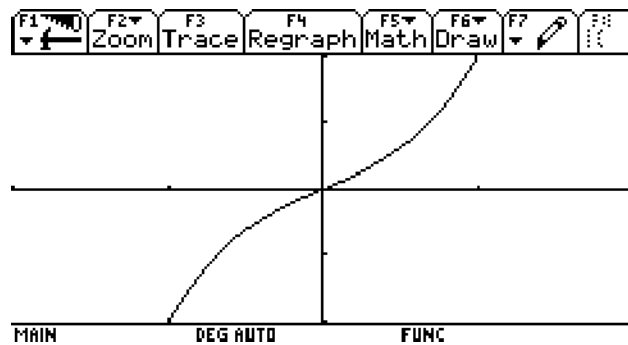
1. Die verschiedenen Graphen einer Funktionsschar

Wir verwenden $f_k(x) = x^3 - k \cdot x$ und setzen für k jeweils verschiedene Zahlen ein.

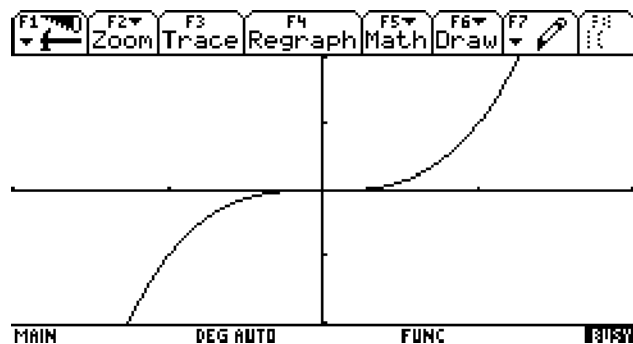
- Für $k = -2$



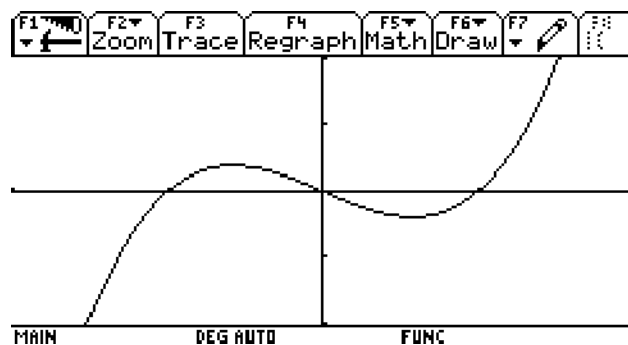
- Für $k = -1$



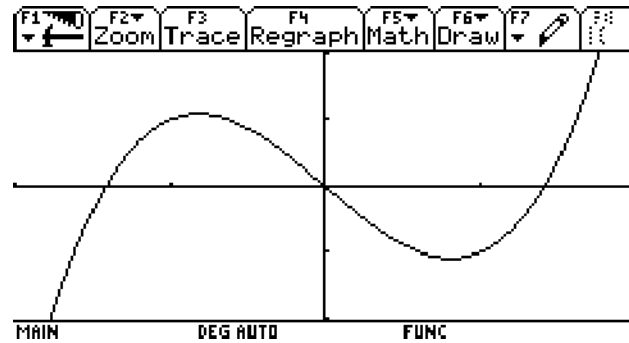
- Für $k = 0$



- Für $k = 1$



- Für $k = 2$



2. Vermutungen anstellen

- In diesem Falle gehen alle Graphen durch den Punkt $(0/0)$ und sind zu diesem punktsymmetrisch. Da sie einen gemeinsamen Punkt haben, werden sie auch als *Bündel* bezeichnet.
- Der Koordinatenursprung ist zugleich Wendepunkt aller Graphen. Für $k = 0$ ist der Nullpunkt zugleich Sattelpunkt, da auch die erste Ableitung und somit auch die Steigung den Wert 0 haben.
- Für $k \leq 0$ gibt es nur eine Nullstelle – beim Koordinatenursprung – und f_k hat keinen Extrempunkt
- Für $k > 0$ gibt es drei Nullstellen, f_k hat einen Hoch- und einen Tiefpunkt. Die Maximumstelle befindet sich im zweiten Quadranten, die Minimumstelle im 4.

Untersuchung von Funktionenscharen

1. Man erhält einen ersten Überblick über eine Funktionenschar f_k , indem man verschiedene Werte von k Funktionsgraphen mithilfe eines GTR zeichnet.
2. Aus diesen Zeichnungen lassen sich oft schon erste Vermutungen über den Verlauf des Funktionsgraphen von f_k in Abhängigkeit vom Parameter ableiten.
3. Zur genaueren Bestimmung der charakteristischen Punkte von f_k (Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte) fasst man den Parameter k als Konstante auf und führt eine Funktionsuntersuchung für f_k durch.

3. Vermutungen anhand der Funktionsterme prüfen

Wegen $f_k(0) = 0$ verlaufen alle Funktionsgraphen durch den Koordinatenursprung $O(0/0)$. Zum Nachweis der Punktsymmetrie müssen wir zeigen, dass $f_k(-x) = -f_k(x)$ ist.

Wegen $f_k(-x) = (-x)^3 - k \cdot (-x) = -x^3 + k \cdot x = -(x^3 - k \cdot x) = -f_k(x)$ ist das tatsächlich so. Als Symmetriepunkt ist $O(0/0)$ offensichtlich auch Wendepunkt von f_k . Auch die Unterscheide für $k \leq 0$ und für $k > 0$ können wir bereits anhand der Funktionsterme begründen.

$k \leq 0$ Da die Graphen zu $y = x^3$ und zu $y = -k \cdot x$ monoton steigen, muss auch der Graph zu $f_k(x) = x^3 - k \cdot x$ monoton steigen, d.h., es gibt genau eine Nullstelle und keine Extrempunkte.

$k > 0$ Da der Graph zu $y = x^3$ nahe bei 0 näher an der x-Achse verläuft als der Graph zu $y = k \cdot x$, muss der Graph zu $f_k(x) = x^3 - k \cdot x$ an der Stelle 0 vom 2. Quadranten in den 4. Quadranten wechseln.

Da für $x \rightarrow +\infty$ der Wert von $f_k(x) = x^3 - k \cdot x \rightarrow +\infty$ strebt, muss der Graph von f_k für $x > 0$ noch einmal die x-Achse schneiden.

Entsprechend – aber auch schon aus der Symmetrie des Graphen zum Koordinatenursprung – folgt aus $f_k(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$, dass der Graph von f_k auch für $x < 0$ noch einmal die x-Achse schneidet. Daraus folgt, dass f_k (mindestens) drei Nullstellen und somit (mindestens) zwei Extrempunkte haben muss.

Funktionsuntersuchungen

Produktregel

Satz: Wenn die Funktionen u und v an der Stelle a differenzierbar sind, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ an der Stelle a differenzierbar, und es gilt: $f'(x) = u'(a) \cdot v(a) + u(a) \cdot v'(a)$

Beispiel: $f(x) = 5x^4 \cdot (\sqrt{x} + 1) \Rightarrow f'(x) = 20x^3 \cdot (\sqrt{x} + 1) + 5x^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^3}{2\sqrt{x}} (4 \cdot \sqrt{x} + 4 + x)$
 $= 2,5 x^2 (4x + 4 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \sqrt{x})$

Quotientenregel

Wenn die Funktion u und v an der Stelle a (mit $v(a) \neq 0$) differenzierbar sind, dann ist auch die Funktion f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ an der Stelle a differenzierbar und es gilt: $f'(a) = \frac{u'(a) \cdot v(a) - u(a) \cdot v'(a)}{(v(a))^2}$

Beispiel: $f(x) = \frac{x}{(1-2x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(1-2x)^2 - x \cdot 2(1-2x)(-2)}{(1-2x)^4} = \frac{1-2x+4x}{(1-2x)^3} = \frac{1+2x}{(1-2x)^3}$

Kettenregel

Die Funktion v sei in einem Intervall I_1 definiert und an der Stelle a differenzierbar. Die Funktion u sei in einem Intervall I_2 definiert. Es gelte $v(x) \in I_2$ für alle $x \in I_1$.

u sei an der Stelle $v(a) \in I_2$ differenzierbar. Dann ist die Funktion f mit $f(x) = u(v(x))$ an der Stelle a differenzierbar und es gilt: $f'(a) = v'(a) \cdot u'(v(a)) = u'(v(a)) \cdot v'(a)$.

Beispiel: $((x^2 + 2x - 4)^{15})' = (2x + 2) \cdot 15 \cdot (x^2 + 2x - 4)^{14} = 15 \cdot (x^2 + 2x - 4)^{14} \cdot (2x + 2)$

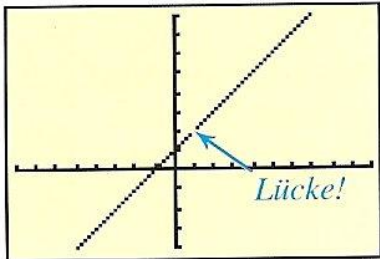
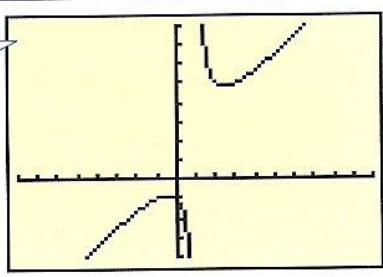
Gebrochenrationale Funktionen

Eine Funktion, deren Funktionsterm als Bruch (Quotient) $\frac{p(x)}{q(x)}$ von zwei Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ geschrieben werden kann, heisst gebrochenrationale Funktion.

Definitionsbereich:

In den Funktionsterm $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ einer gebrochenrationalen Funktion können für x keine Zahlen eingesetzt werden, für die der Nenner null wird. Die Funktion f hat an dieser Stelle jeweils eine **Definitionslücke**.

Verhalten an den Definitionslücken: Das Verhalten gebrochenrationaler Funktionen an den Definitionslücken kann unterschiedlich sein.

	<i>Pol mit Vorzeichenwechsel: unterschiedliches Vorzeichen der Funktionswerte links und rechts vom Pol</i>	
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $-8 \leq x \leq 10 \text{ und } -4 \leq y \leq 8$	$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ $-8 \leq x \leq 10 \text{ und } -4 \leq y \leq 8$	
Beide Funktionsgraphen haben an der Stelle 1 eine Definitionslücke. In dem Verhalten an der Definitionslücke unterscheiden sie sich jedoch.		
Zwar hat der Graph von f an der Stelle 1 eine Definitionslücke. Jedoch stimmt der Graph von f anscheinend an allen anderen Stellen mit der Geraden zu $y = x + 1$ überein. Das ergibt sich auch rechnerisch aus der Gleichung $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ für alle $x \neq 1$. Daher kann man die Definitionslücke des Graphen von f durch Ergänzung um den Geradenpunkt $P(1 2)$ beheben.¹ Man nennt diese Definitionslücke daher eine hebbare Definitionslücke.	Strebt x gegen die Definitionslücke, so strebt $g(x)$ augenscheinlich gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$. Das ergibt sich auch rechnerisch daraus, dass für $x \rightarrow 1$ der Zähler $x^2 + 1$ gegen 2, der Nenner $x - 1$ aber gegen 0 strebt. Für $x \rightarrow 1$ schmiegt sich der Graph von g der Geraden zu $x = 1$ immer mehr an. Man sagt: Die Funktion g hat an der Stelle 1 einen Pol mit Vorzeichenwechsel. Die Gerade zu $x = 1$ heißt Polgerade der Funktion g.	

(Bild S.165)

Verhalten gebrochenrationaler Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen weisen auch im Verhalten für $x \rightarrow \infty$ bzw. für $x \rightarrow -\infty$ Besonderheiten auf.

Der Graph von f schmiegt sich für $x \rightarrow \infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ dem Graphen einer ganzrationalen **Näherungsfunktion** g an.

Die Funktionswerte von f kommen den Funktionswerten von g beliebig nahe, falls x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt:

$$f(x) - g(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow +\infty \text{ und für } x \rightarrow -\infty.$$

Ist die Näherungsfunktion g linear, so nennt man ihren Graph **Asymptote** für f.

Polynomdivision:

Die Polynomdivision funktioniert wie das schriftliche Dividieren.

Beispiel:

$$(2x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x+2) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 9 + \frac{17}{x+2}$$
$$\begin{array}{r} \underline{2x^4 + 4x^3} \\ 4x^3 - 3x^2 + x - 1 \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ 5x^2 + x - 1 \\ \underline{5x^2 + 10x} \\ 9x - 1 \\ \underline{9x + 18} \\ 17 \end{array}$$

Untersuchung gebrochenrationaler Funktionen

- 1) Graph in verschiedenen (durch Veränderung der Schrittgrösse der Achsen) Fenstern betrachte, Vermutungen äussern.
- 2) Definitionslücke ermitteln – Verhalten an Definitionslücken untersuchen (siehe oben)
- 3) Symmetrie untersuchen
- 4) Schnittpunkte mit Koordinatenachsen ermitteln
- 5) Verhalten für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ untersuchen
- 6) Extrempunkt ermitteln
- 7) Wendepunkte ermitteln

Beispiel:

$$f(x) = \frac{20x^3}{20x^2 + x - 19}$$

- 1) Funktion in den Taschenrechner eingeben und Graph betrachten, dazu Vermutungen anstellen

Resultat: Polstellen in der Nähe von -1 und 1, möglicherweise punktsymmetrisch zum Koordinationsursprung, mindestens einen Hoch- und einen Tiefpunkt. Vermutlich asymptotisch. $O(0|0)$ ist Sattelpunkt des Graphen.

- 2) Die Funktion hat an den Stellen Definitionslücken, wo das Nennerpolynom $20x^2 + x - 19$ den Wert 0 annimmt. **Quadratische Gleichung** auflösen: -1 und $\frac{19}{20}$.
Da für $x \rightarrow -1$ bzw. $x \rightarrow \frac{19}{20}$ das Nennerpolynom gegen 0, das Zählerpolynom aber gegen einen von 0 verschiedenen Wert strebt, liegt an den Definitionslücken jeweils ein Pol vor. Man erkennt, dass an den beiden Polen ein (+/-) **Vorzeichenwechsel** erfolgt.

- 3) Die Definitionslücken liegen nicht symmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph ist also entgegen unserer Vermutungen nicht symmetrisch zum Koordinatenursprung.
- 4) Das Zählerpolynom $20x^3$ hat nur eine Nullstelle $x=0$. Der Punkt $O(0|0)$ ist einziger Schnittpunkt des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

5) Mit Hilfe der Polynomdivision erhalten wir:
$$x - \frac{1}{20} + \frac{381x - 19}{400x^2 + 20x - 380}$$

Die Funktion g mit $g(x) = x - \frac{1}{20}$ ist Näherungsfunktion.

- 6) Extrempunkte ermitteln:

H (-1.74|-2.65) als Hochpunkt

T (1.64|2.42) als Tiefpunkt

- 7) Wendepunkte ermitteln

$$f''(x) = \frac{120x(127x^2 - 19x + 361)}{(20x^2 + x - 19)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad x=0$$

Da die Gleichung ausser $x=0$ keine weiteren Lösungen hat, kann es keine weiteren Wendepunkte geben.

Mathematik und Wirtschaft

1) Kostenfunktion – Grenzkosten – Durchschnittskosten

Definitionen:

Kosten: Entstehen durch Werteinsatz von Gütern und Dienstleistungen zur Leistungserstellung.

Bezugs- / Kostenobjekt: Ein abstraktes Objekt dem Kosten zugerechnet werden.

Bezugsgrösse: Ein kostenbestimmendes Attribut eines Bezugsobjekts. Es bestimmt eine Kosteneinflussgrösse mittels einer Kennzahl.

(Bsp: Anzahl Mitarbeiter, Raumfläche, Anzahl Bestellungen)

Kostenfunktion $K(x)$: Sie stellt innerhalb der Wirtschaftswissenschaften den Zusammenhang zwischen den Kosten und einer Bezugsgrösse dar.

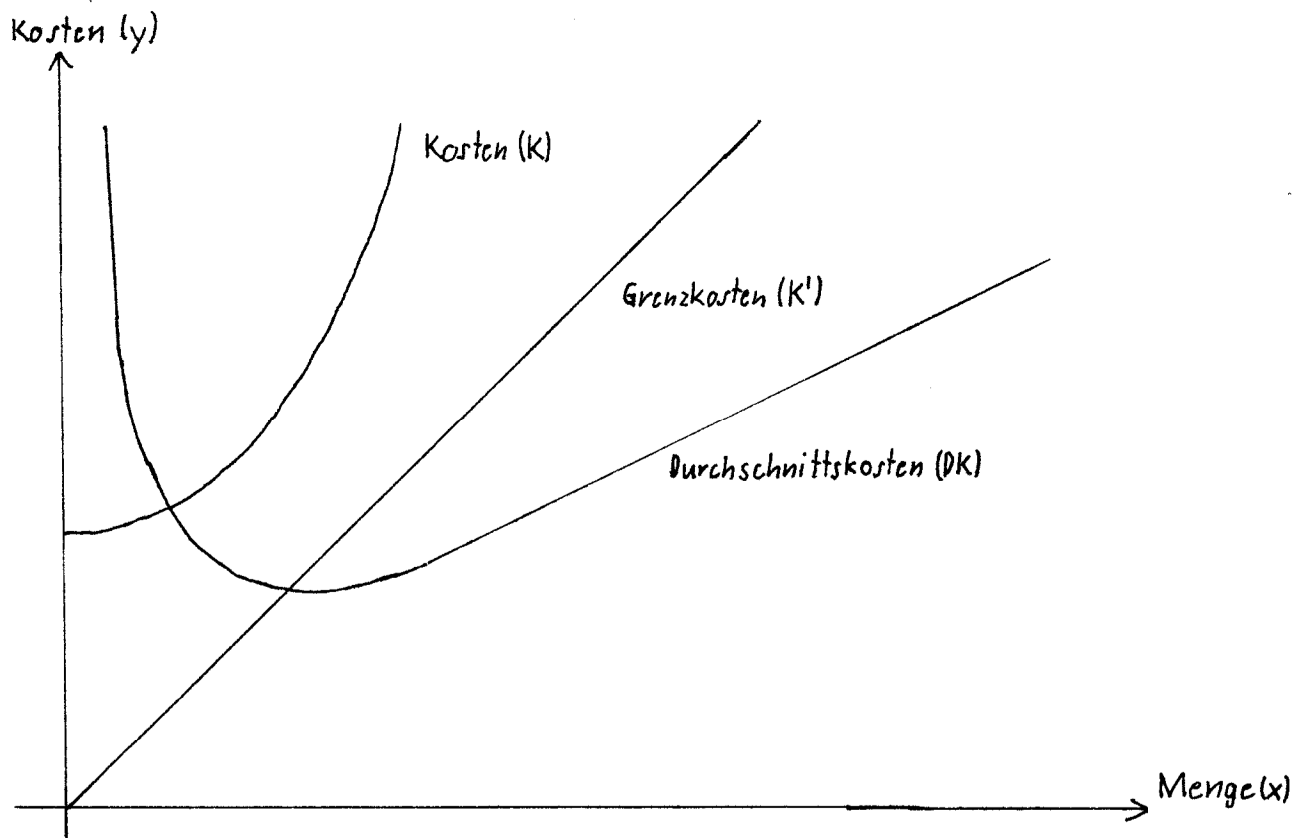
Grenzkosten(funktion) $K'(x)$: Kosten, die durch die Produktion einer zusätzlichen Einheit eines Produkts entstehen.

(Die Grenzkostenfunktion bildet die erste Ableitung der Kostenfunktion)

Durchschnittskosten $DK(x)$: Kosten, die pro produzierte Einheit in vollen Umfang anfallen.

Beispiel am Menge- / Kostendiagramm:

(Die Durchschnittskostenfunktion schneidet die Grenzkostenfunktion im Tiefpunkt.)



2) Ertragsfunktion – Grenzertrag - Durchschnittsertrag

Definitionen:

Wertschöpfung: Transformation von vorhandenen Gütern in Güter höheren Wertes
Es gilt: Wertschöpfung = Gesamtleistung - Vorleistungen

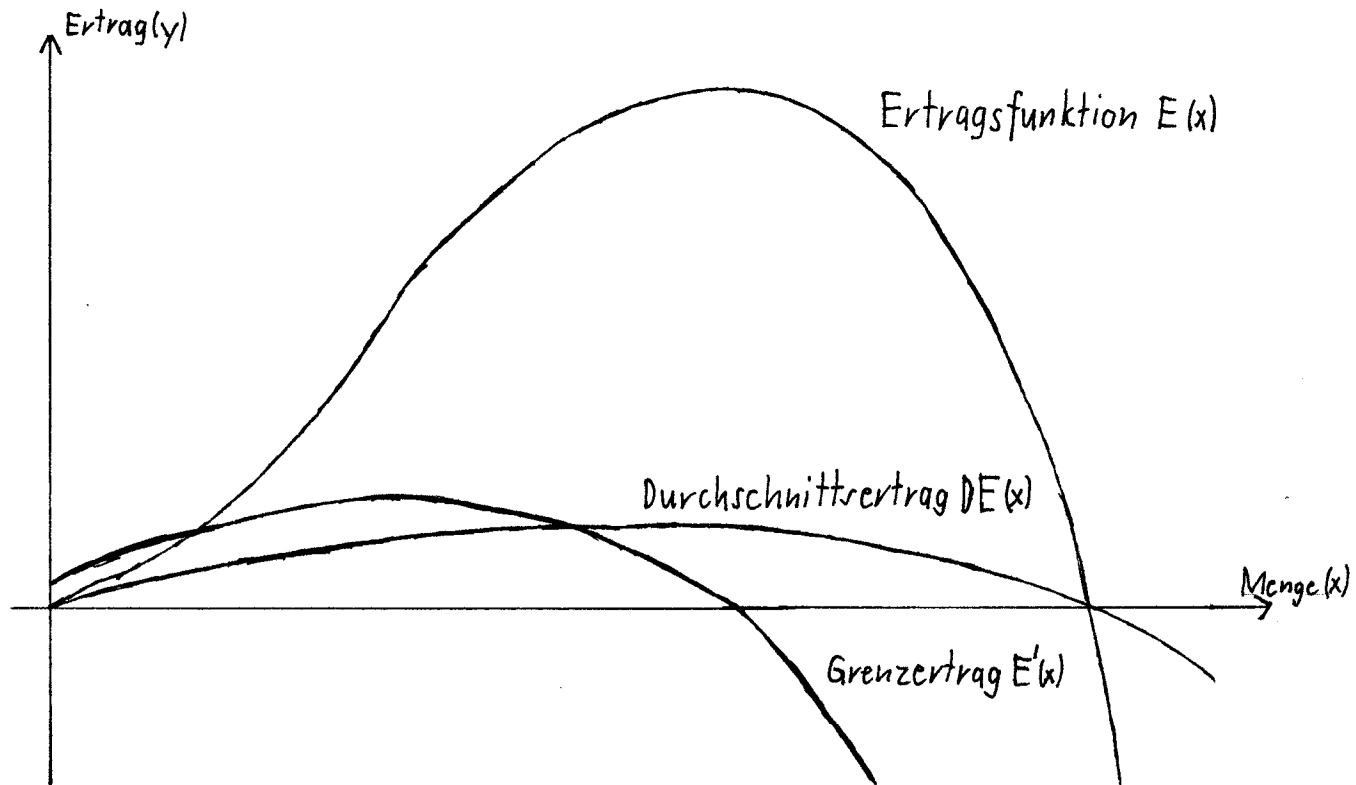
Ertragsfunktion $E(x)$: Sie stellt innerhalb der Wirtschaftswissenschaften den Zusammenhang zwischen dem Ertrag und einer Bezugsgrösse dar.

Grenzertragsfunktion $E'(x)$: Ertrag, der durch die Produktion einer zusätzlichen Einheit eines Produkts entsteht.
(Die Grenzertragsfunktion bildet die erste Ableitung der Ertragsfunktion)

Durchschnittsertrag $DE(x)$: Erträge, die pro produzierte Einheit in vollen Umfang anfallen.

Beispiel am Menge- / Ertragsdiagramm:

(Die Durchschnittsertragsfunktion schneidet die Grenzertragsfunktion im Hochpunkt.)



Kombinatorik, Skalarprodukt

1.) Kombinatorik

Die Kombinatorik wird in drei Untergruppen unterteilt:

- Variation
- Permutation
- Kombination

1. Variation

Seien $M_1, M_2, \dots, M_n$ Mengen, dann heisst die Menge $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$

Produktmenge (kartesisches Produkt).

Für die Anzahl der Elemente einer Produktmenge gilt der **Produktsatz**:

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n| = |M_1| \times |M_2| \times \dots \times |M_n|$$

daraus folgt, falls M endliche Menge n ist: $|M \times M \times \dots \times M| = n^k$

Eine Anordnung von n Elementen zu einem k -Tupel, wobei jedes Element wiederholt verwendet werden darf, heisst *Variation (mit Wiederholung)*.

Bsp.: Auf wie viele Arten kann man die 12 Stellen auf einem Tippzettel beim Fussballtoto mit 1, 2 oder x ausfüllen?

$$M = \{1, 2, 3\} \quad |M| = 3 \quad \text{z.B.: } (1, x, 1, 2, 1, x, \dots, x)$$

Variationen von 3 Elementen zu einem 12-Tupel $\rightarrow 3^{12}$

$$|\{1, 2, x\} \times \{1, 2, x\} \times \dots \times \{1, 2, x\}| = 3^{12}$$

Weiter folgt aus dem Produktsatz: Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$. die Menge aller k -Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, die man mit verschiedenen Elementen aus M bilden kann (sie dürfen also nicht mehrfach vorkommen) enthält

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Elemente. Eine Variation ohne Wiederholung liegt also vor, wenn die Reihenfolge der Elemente wesentlich ist, Wiederholungen aber nicht gestattet sind.

Bsp.: Auf wie viele Arten können neun Personen auf 19 Stühlen Platz nehmen?

$$M = \{1, 2, \dots, 19\} \quad |M| = 19 \quad k = 9$$

$$\frac{19!}{(19-9)!} = \frac{19!}{10!}$$

2. Permutation

Eine Anordnung von n verschiedenen Elementen zu einem n -Tupel heisst *Permutation (ohne Wiederholung)*.

Bsp.: In einer Urne liegen die Buchstabenkärtchen A, B, E, R. Durch viermaliges Herausgreifen (ohne Zurücklegen) wird ein Wort gebildet. Wie viele Wörter gibt es?

4 mögliche Vertauschungen $4! = 24$

Die Menge aller n -Tupel, in denen $n_1, n_2, \dots, n_m$ jeweils gleiche Glieder vorkommen, enthält $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!}$ Elemente. Ein n -Tupel, in dem $n_1, n_2, \dots, n_m$ jeweils gleiche Glieder vorkommen heisst *Permutation (ohne Wiederholung)*.

3. Kombination

Bsp.: Von 4 Personen (A,B,C,D) sollen 2 ausgewählt werden. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

Es kommt hier nicht auf die Reihenfolge an, in der die Personen ausgewählt werden. Von den $\frac{4!}{2!} = 12$ möglichen Personenpaaren (Variation ohne Wiederholung) werden daher diejenigen Paare gestrichen, die bis auf ihre Reihenfolge mit einem anderen Paar übereinstimmen (z.B. (AB) – (BA)). Es bleiben noch 6 Möglichkeiten.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ für } k \leq n$$

Seien n, k Element von $\mathbb{N}_0$. Dann heisst $\binom{n}{k} =$ Binomialkoeffizient

$$0 \quad \text{für } k > n$$

Eine Auswahl von k Elementen aus einer Menge von n Elementen, in der jedes Element wiederholt auftreten darf, heisst *Kombination (mit Wiederholung)*.

Jetzt kann man weder von n -Tupeln (da die Reihenfolge nicht wesentlich ist) noch von Teilmengen (da die Elemente sich wiederholen können) sprechen. Eine Kombination (mit Wiederholung) liegt also vor, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt und die Elemente sich wiederholen dürfen.

Bsp.: Wie viele verschiedenen Augenkombinationen kann man beim Werfen dreier Würfel erhalten?

$$M=\{1,2,3,4,5,6\} \quad |M| = 6=n \quad \binom{n+k-1}{k} \quad k=3$$

$$= \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

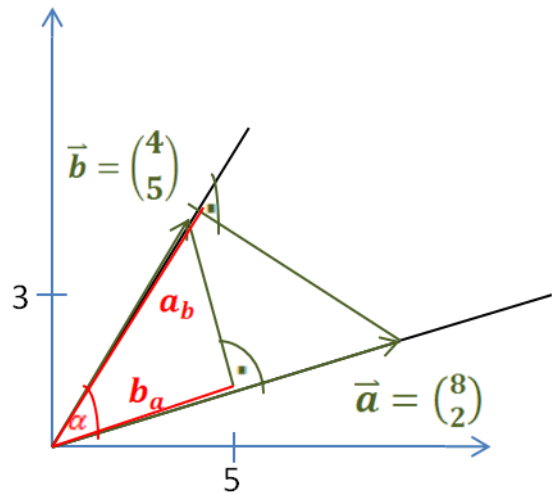
2.) Skalarprodukt

Definition: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 8 + 2 \cdot 5 = 42$

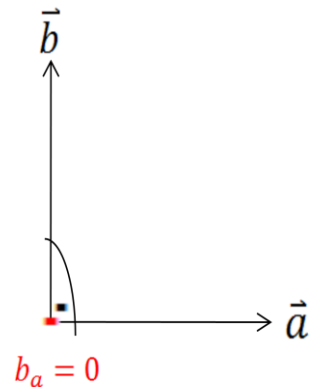
$$b \cdot a_b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5.2 \end{pmatrix} = 16 + 26 = 42$$

$$a \cdot b_a = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 40 + 2 = 42$$

$$a \cdot b \cdot \cos \alpha = 42; \alpha = 37.30^\circ$$



dann gilt:



Wenn $\alpha = 90^\circ$, dann $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
 Wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dann $\alpha = 90^\circ$

→ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht = orthogonal = normal zueinander

Deshalb gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$

Anwendungsbeispiele:

1.) Sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal zueinander?

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = -7 - 3 = -10; \text{ nicht orthogonal zueinander}$$

2.) Welchen Winkel schliessen die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ miteinander ein?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \cos \alpha$$

$$3 - 12 = \sqrt{25} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \alpha$$

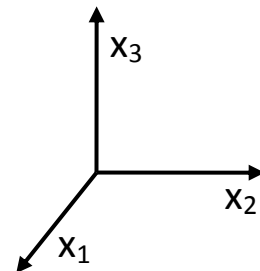
$$\alpha = \arccos \frac{-9}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{10}} = 124.7^\circ$$

Vektoren und Geraden

Wer kennt sie nicht, diese Spielautomaten, bei denen man die Greifzange in der horizontalen Ebene steuern und dann mit ein bisschen Glück ein Plüschtier ergattern kann? Bei der Konstruktion dieser Maschine hatte man viel mit Vektoren und Geraden zu tun. Schliesslich kann man mit dem Controller die Greifzange in der x_1 - x_2 -Ebene beliebig verschieben und mit einem Knopfdruck die Bewegung der Greifzange entlang der x_3 -Achse auslösen.

Zuallererst wählen wir ein räumliches kartesisches Koordinatensystem mit einem Ursprung O . Die Koordinatenachsen sind zueinander orthogonale Geraden.

Ein kartesisches Koordinatensystem heisst „Rechtssystem“, wenn die erste, zweite und dritte Achse wie der Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand zueinander liegen.



Vektoren mit drei Koordinaten

Um einen beliebigen Punkt P im Raum zu finden, folgen wir den drei Achsen um so viele Einheitsstrecken, wie es uns das Zahlentripel, also z. B. $P(10|20|25)$, vorgibt.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Ein *Vektor mit drei Koordinaten* ist ein geordnetes Zahlentripel, welches wir als Spalte in dieser Form schreiben.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor heisst *Nullvektor*.

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Dies ist der Vektor mit der x_1 -Koordinate -7, der x_2 -Koordinate 3 und der x_3 -Koordinate 1.

Länge, Betrag und Richtung eines Vektors

- Unter der *Länge* des Vektors $\vec{v}$ versteht man die Länge der Pfeile, welche den Vektor in einem Koordinatensystem darstellen. Statt „Länge“ sagt man auch *Betrag* von $\vec{v}$.
Wir bezeichnen die Länge des Vektors $\vec{v}$ mit $|\vec{v}|$.
- Unter der *Richtung* eines Vektors $\vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ versteht man die Richtung der Pfeile, welche den Vektor in einem Koordinatensystem darstellen.
- Der Nullvektor $\vec{0}$ hat die Länge null und keine Richtung und daher keine Pfeildarstellung.

Für die Länge $|\vec{v}|$ eines dreidimensionalen Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Beispiel:

Ein Drache fliegt von A(0|0|0) nach B(12|24|18). Welche Strecke legt er zurück?

$$|\vec{AB}| = \sqrt{12^2 + 24^2 + 18^2} = \underline{\underline{32,3m}}$$

Addition und Subtraktion von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ werden koordinatenweise *addiert* und *subtrahiert*.

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Summe der Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ (Summenvektor)}.$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Differenz der Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ (Differenzvektor)}.$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+7 \\ 7+7 \\ 7+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 7-7 \\ 7-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Vielfache von Vektoren – Skalarmultiplikation

Ein Vektor $\vec{v}$ wird koordinatenweise mit einer reellen Zahl λ *vervielfacht*.

Man nennt den Vektor $\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$ das λ -fache des Vektors $\vec{v}$.

Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 7 \\ 5 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 35 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Gegenvektor eines Vektors

Man bildet den Gegenvektor $-\vec{v}$ eines Vektors $\vec{v}$, indem man bei jeder Koordinate von $\vec{v}$ das

Vorzeichen umkehrt: $-\vec{v} = -\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$

Die Pfeile eines Vektors, der nicht dem Nullvektor entspricht, haben dieselbe Länge und zueinander entgegengesetzte Richtungen.

Beispiel:

$$-\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ist der Gegenvektor von } \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dreiecksregel

Bedingung: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Beweis:

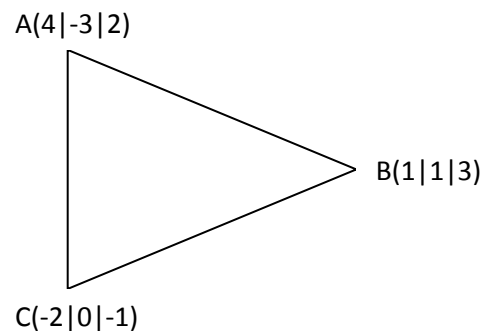
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}$$



Im Koordinatensystem hat der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ den Ortsvektor:

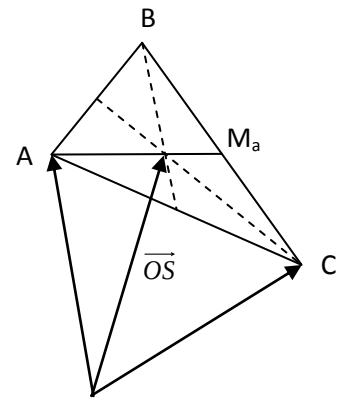
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Schwerpunkt eines Dreiecks

$$\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{AS} = \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{AM}_a = \vec{OA} + \frac{2}{3} (\vec{AM}_a - \vec{OA}) = \vec{OA} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} (\vec{OC} + \vec{OB}) - \vec{OA} \right)$$

$$= \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OC} + \frac{1}{3} \vec{OB} - \frac{2}{3} \vec{OA} = \frac{1}{3} \vec{OC} + \frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{1}{3} \vec{OA}$$

$$\vec{OS} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$



Beispiel:

A(3|5|-2), B(1|0|7), C(3|-8|4)

$$\vec{OS} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow S\left(\frac{7}{3} | -1 | 3\right)$$

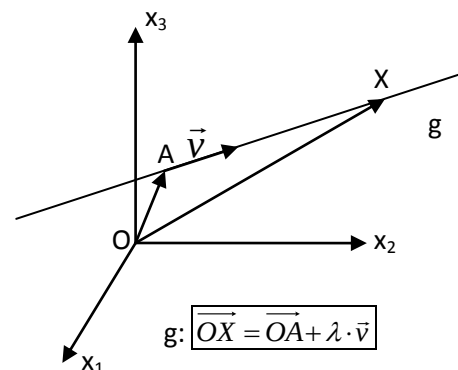
Parameterdarstellung einer Geraden

Eine Gerade geht durch den Punkt A und hat die Richtung des Vektors $\vec{v}$.

Für jeden Punkt X der Geraden gilt: $\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{v}$ mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.

Und umgekehrt:

Setzt man für λ irgendeine Zahl ein, ergibt sich der Ortsvektor eines Geradenpunktes.



Beispiel:

Die Gerade durch den Punkt A (4|2|3) und mit dem

Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat die Parameterdarstellung

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\vec{OA}$ Stützvektor
 $\vec{v}$ Richtungsvektor
 x beliebiger Punkt auf g
 λ Parameter

Die Punkte $P_1(5|5|5)$, $P_2(7|11|9)$ und $P_3(2|-4|-1)$ liegen auf dieser Geraden, sie haben die zugehörigen Parameterwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -2$.

Aufgaben

Schreiben Sie den Vektor $\vec{v}$ als Vielfaches des Vektors $\vec{w}$.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = 0.5 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot (-4) \\ 0.5 \cdot 0 \\ 0.5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den Gegenvektor zu $\vec{v}$ an.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(-1) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-4) \\ (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den Richtungs- und Stützvektor der Geraden an.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Stützvektor: } \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden durch den Punkt A mit der Richtung des Vektors $\vec{v}$ an.

$$A(2|3|-1), \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Liegt der Punkt P auf der Strecke $\overrightarrow{OA}$?

$$A(8|12|-10); P(4|6|-5)$$

$$\overrightarrow{OP} = 0.5 \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{OP}$ Vielfaches von $\overrightarrow{OA}$ ist, liegt der Vektor auf dieser Geraden.

Geben Sie die Parameterdarstellung der Geraden durch A und B an.

A(1|2|3), B(-2|4|5)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} (-2)-1 \\ 4-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Liegt der Punkt R auf der Geraden durch die beiden Punkte A und B?

Gerade: A(2|-4|4), B(-2|0|2)

Punkt: R(-1|-1|2.5)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} (-2)-2 \\ 0-(-4) \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} (-1)=2-4\lambda \\ (-1)=-4+4\lambda \\ 2.5=4-2\lambda \end{pmatrix}$$

Der Punkt R liegt auf der Strecke $\overrightarrow{AB}$ für $\lambda = 3/4$

Schnittpunkt zweier Geraden

Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 75 \\ 150 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

$$\begin{cases} -2 + 3\lambda = 1 + 75\mu \\ 3 - 1.5\lambda = -6 + 150\mu \\ 1 + \lambda = 5 - 50\mu \end{cases}$$

Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -75\mu & 3 \\ -1.5 & -150\mu & -9 \\ 1 & 50\mu & 4 \end{array} \right)$$

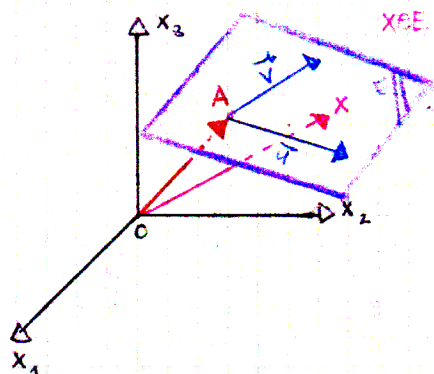
Der GTR gibt mit dem Befehl *rref* aus:

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 0.04 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $\lambda = 2$ und $\mu = 0.04$.

EBENEN-Parametergleichung

PARAMETERGLEICHUNG EINER EBENE



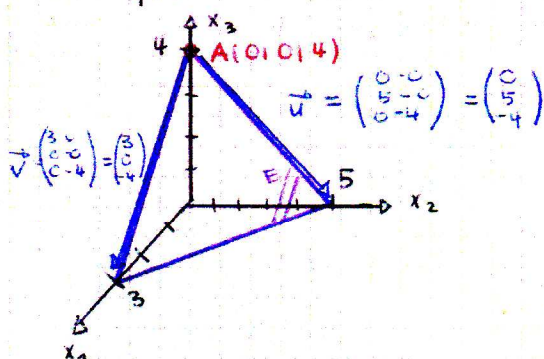
$\vec{u}, \vec{v}$: Richtungsvektoren

$\vec{OA}$: Stützvektor

$\vec{x} = \vec{OX}$: Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt auf E.

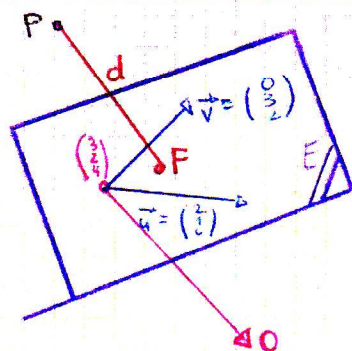
Es gilt :
$$\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Beispiel :



$$E: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER EBENE



$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P(6|12|25)$$

F: Fußpunkt

Lösungsidee:

$$d = |\vec{FP}|$$

Bedingungen:

$$\begin{cases} \vec{FP} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{FP} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

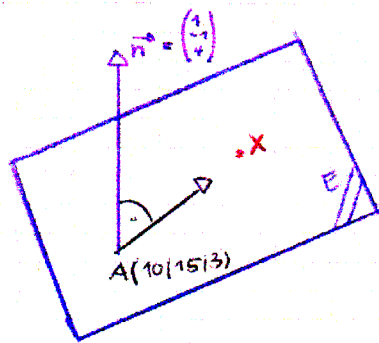
Ansatz für F: $\vec{OF} = \begin{pmatrix} 3+2\lambda \\ 2+\lambda+3\mu \\ 4+2\mu \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{FP} = \begin{pmatrix} 6-3-2\lambda \\ 12-2-\lambda-3\mu \\ 25-4-2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2\lambda \\ 10-\lambda-3\mu \\ 21-2\mu \end{pmatrix}$$

$$\text{Also: } \begin{cases} \begin{pmatrix} 3-2\lambda \\ 10-\lambda-3\mu \\ 21-2\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} 3-2\lambda \\ 10-\lambda-3\mu \\ 21-2\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6-4\lambda+10-\lambda-3\mu=0 \\ 30-3\lambda-9\mu+42-4\mu=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -0,1429 \\ \mu = 5,5714 \end{cases}$$

$$d = |\vec{FP}| = \sqrt{3,2858^2 + (-6,5711)^2 + 9,86^2} = \underline{\underline{12,2675}}$$

KOORDINATEN GLEICHUNG EINER EBENE



AEE

$\vec{n} \perp E$: Normalenvektor
 $x \in E$

Bedingung: $\vec{AX} \cdot \vec{n} = 0$

$$\vec{AX} = \underset{\text{Spitze}}{\vec{OX}} - \underset{\text{Anfang}}{\vec{OA}}$$

$$\text{folgt: } (\vec{OX} - \vec{OA}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{OX} \cdot \vec{n} - \vec{OA} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{OX} \cdot \vec{n} = \vec{OA} \cdot \vec{n}$$

Mit:

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

folgt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 10 - 15 + 12$$

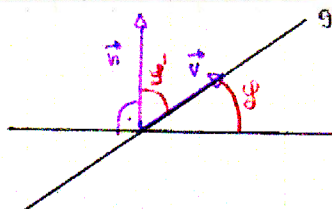
$$\boxed{x_1 - x_2 + 4x_3 = 7} \rightarrow \text{Die Koeffizienten in der Koordinatengleichung der Ebene sind die Komponenten des normalen Vektors dieser Ebene.}$$

$$\hookrightarrow n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$$

Sonderfälle: $\bullet \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1$

$\bullet$ Methode von Hesse: $\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - d}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$

WINKEL ZWISCHEN GERADE UND EBENE



$$\varphi = 90^\circ - \varphi'$$

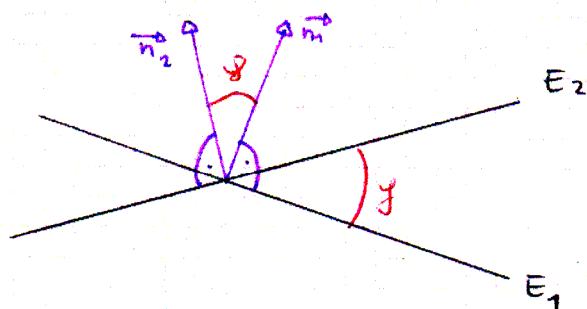
$$\vec{n} \cdot \vec{v} = |\vec{n}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi'$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \varphi' = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}}$$

$$= \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$$

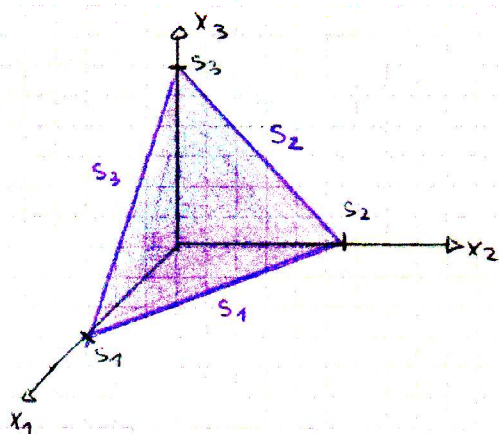
$$= \sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}$$

WINKEL ZWISCHEN EBENEN



$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

SPURPUNKTE, SPURGERADEN



S_1, S_2, S_3 : Spurpunkte
 s_1, s_2, s_3 : Spurgeraden

Beispiel:

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10$$

$$S_1 (10 | 0 | 0)$$

$$S_2 (0 | -5 | 0)$$

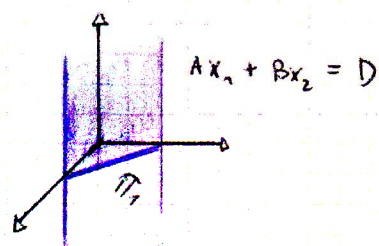
$$S_3 (0 | 0 | 2)$$

$$S_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

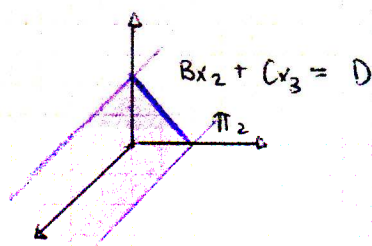
$$S_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$S_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

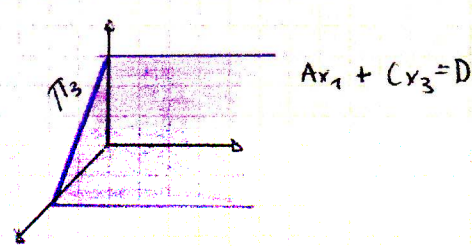
HAUPTEBENEN, PROJIZIERENDE EBENEN



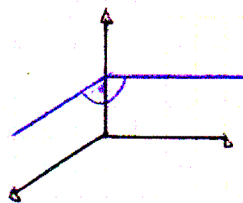
erstprojizierende Ebene



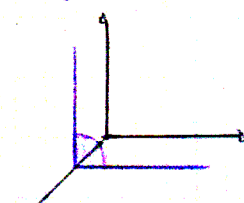
zweitprojizierende Ebene



drittprojizierende Ebene



erste Hauptebeue



Haupt-zweite Ebene



dritte Hauptebeue

LAGEBEZIEHUNGEN

→ Ebene - Gerade

$$E \cap g = \{s\}$$

$$E \cap g = \{\}$$

$$E \cap g = g$$

→ Ebene - Ebene

$$E_1 \cap E_2 = g$$

$$E_1 \cap E_2 = \{\}$$

$$E_1 \cap E_2 = E_2$$

$$E_1 \parallel E_2 \cap E_1 + E_2$$

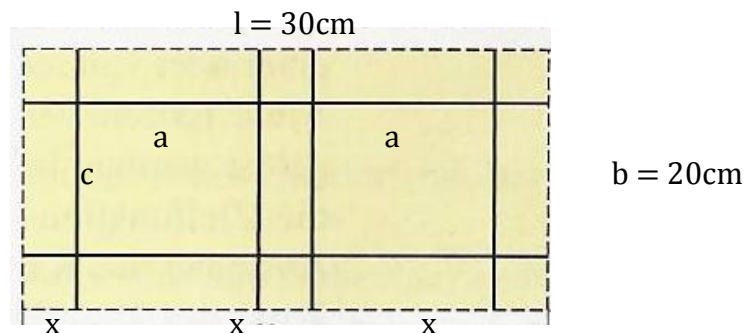
$$E_1 = E_2$$

Elemente der Mathematik SII: Kap.6 Optimierung und Kurvenanpassung (S. 191-218)

Beispiel zur Optimierung:

Aufgabe: Aus einem rechteckigen Kartonstück mit den Seitenlängen 30cm und 20cm soll eine quaderförmige geschlossene Schachtel mit einem möglichst grossen Fassungsvermögen hergestellt werden.

Skizze:



Fragenstellung: Bestimme x so, dass das Volumen maximal wird.

Zielfunktion:

$$V = acx$$

Nebenbedingungen:

$$3x + 2a = l$$

$$2x + c = b$$

$$0 \leq x \leq \frac{b}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{l}{3}$$

Nebenbedingungen in die Zielfunktion einsetzen:

$$V = \frac{l-3x}{2} \cdot (b-2x) \cdot x$$

$$V(x) = \frac{1}{2} (l-3x) (bx-2x^2)$$

$$V(x) = \frac{1}{2} (blx - 2lx^2 - 3bx^2 + 6x^3)$$

$$V(x) = \frac{1}{2} (600x - 60x^2 - 60x^2 + 6x^3)$$

$$V(x) = 3x^3 - 60x^2 + 300x$$

Notwendige Bedingung für EW (Extremwerte):

$$V'(x) = 0$$

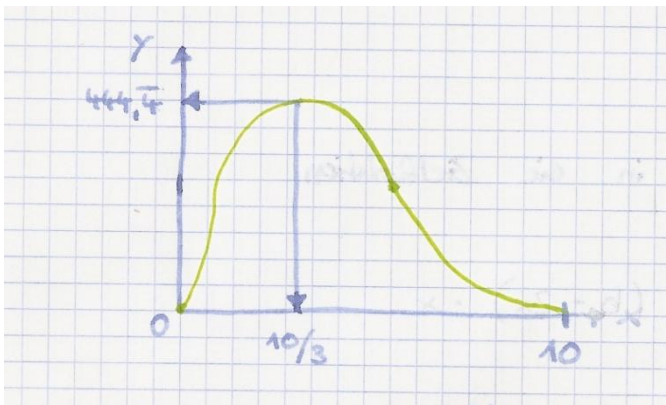
$$V'(x) = 9x^2 - 120x + 300$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 120x + 300 = 0$$

$$3x^2 - 40x + 100 = 0$$

$$D = (-40)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 100 = 1600 - 1200 = 400$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-40) \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 3} = \frac{40 \pm 20}{6} = \begin{cases} \frac{10}{3} \\ 10 \end{cases}$$

Randwerte bestimmen:

$$\text{Randwerte: } V(0) = 0 \\ V(10) = 0$$

Innerer Extremwert:

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 60 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 \\ + 300 \cdot \frac{10}{3} = 444,\bar{4}$$

Hinreichende Bedingung:

$$V''\left(\frac{10}{3}\right) < 0$$

$$V''(x) = 18x - 120$$

$$V''\left(\frac{10}{3}\right) = 18 \cdot \frac{10}{3} - 120 = 60 - 120 = -60$$

$$-60 < 0 \checkmark$$

$$\Leftrightarrow x \text{ muss } \frac{10}{3} \text{ cm gross sein.}$$

Information zur Optimierung:

Vorgehen:

1. Skizze mit Variablen anfertigen.
2. Zielfunktion und Nebenbedingungen auflisten.
3. Nebenbedingungen in die Zielfunktion einsetzen und dann die Zielfunktion so umformen, dass sie nur noch von einer Variable abhängt.
4. Extremwerte bestimmen.
5. Auf Randwerte überprüfen.
6. Mithilfe der Hinreichenden Bedingung eine Kontrolle durchführen.
7. Das Ergebnis formulieren.

Tipp für mündliche Matura: Diese Art von Aufgaben nennt man **Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen**.

Beispiel zur Kurvenanpassung (durch Interpolation):

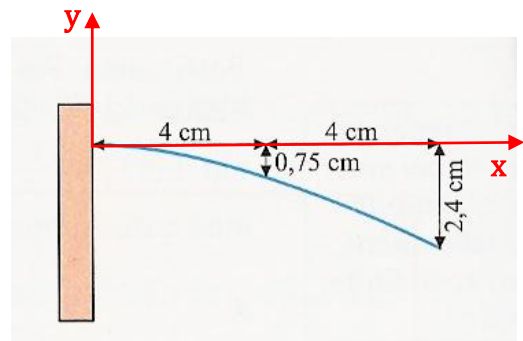
Aufgabe: Die Biegung einer einseitig eingeklemmten Blattfeder, auf deren freies Ende eine Kraft wirkt, kann durch eine kubische Parabel beschrieben werden.

Bestimmen Sie für die angegebenen Abmessungen diese Funktion.

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bedingungen:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(4) &= -0.75 \\ f(8) &= -2.4 \\ f'(0) &= 0 \end{aligned}$$



Einfügen in ein Gleichungssystem:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 64a + 16b + 4c + d = -0.75 \\ 512a + 64b + 8c + d = -2.4 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 64a + 16b = -0.75 \\ 512a + 64b = -2.4 \end{cases} \cdot (-4) \quad \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -256a + 512a &= 3 - 2.4 \\ 256a &= 0.6 \\ a &= 0.002344 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 64 \cdot (0.00234) + 16b &= -0.75 \\ 16b &= -0.9 \\ b &= -0.05625 \end{aligned}$$

Die passende Funktion ist $f(x) = 0.002344x^3 + (-0.05625)x^2$.

Information zur Kurvenanpassung (durch Interpolation):

Punkt-Steigungsform:

$$\text{Steigung } m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Vorgehen:

1. Koordinatensystem festlegen.
2. Ansatz formulieren.
3. Bedingungen in Form von Gleichungen wie $f(0) = 0$ auflisten.
4. Mithilfe eines Gleichungssystems die Koeffizienten berechnen.
5. Überprüfen ob die Funktion stimmt.
6. Das Ergebnis formulieren.

Tipp für mündliche Matura: In diesem Fall ist f eine **ganzrationale Funktion dritten Grades**.

TABLEAU

An Stelle der 2. Ableitung kann auch das Tableau als hinreichende Bedingung für einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt benutzt werden.

Beispiel

$$f(x) = 4x + x^2$$

$$f'(x) = 4 + 2x$$

Die notwendige Bedingung bleibt $f'(x) = 0$

$$0 = 4 + 2x \quad | -4$$

$$-4 = 2x \quad | :2$$

$$-2 = x$$

Der erhaltene Wert und minus unendlich und plus unendlich werden in die Tabelle eingesetzt

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		-4	

① -2 in $f'(x)$ und $f(x)$ einsetzen

$$f'(-2) = 4 + 2 \cdot (-2) = 0$$

$$f(-2) = 4 \cdot (-2) + (-2)^2 = -4$$

② Wenn man bei $f'(x)$ eine Zahl einsetzt die kleiner ist als -2 , ist dann das Resultat positiv oder negativ?

$$f'(-3) = 4 + 2 \cdot (-3) = -2$$

Und wenn die Zahl grösser ist als -2 ?

$$f'(5) = 4 + 2 \cdot 5 = 14$$

③ Wie verändert sich der Wert ^{(für $f(x)$)}, wenn x sich -2 , $+\infty$ oder $-\infty$ nähert?

$$f(-100) = 4 \cdot (-100) + 100^2 = 9600$$

$$f(-3) = 4 \cdot (-3) + (-3)^2 = -3$$

$\Rightarrow$ wird kleiner je näher bei $x = -2$

$$f(-1) = 4 \cdot (-1) + (-1)^2 = -3$$

$$f(100) = 4 \cdot 100 + 100^2 = 1400$$

=> wird grösser je näher
 $x \rightarrow +\infty$ kommt

Aus dem Tableau ist nun ersichtlich, dass bei $x = -2$ ein Tiefpunkt liegt. Es ist sogar die y Koordinate bereits bekannt: $T(-2 | -4)$

Es gilt:



Tiefpunkt



Hochpunkt



} Sattelpunkt



Merksätze

Trigonometrie

Sinus	Cosinus	Tangens	Cotangens
G	A	G	A
Hühner	Hof	A	G

G → Gegenkathete

A → Ankathete

H → Hypothenuse

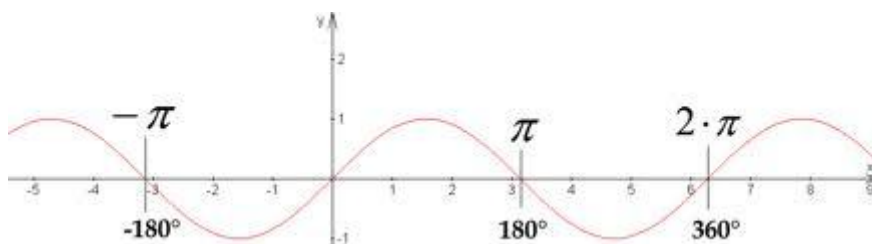
Aus der Tabelle folgt also: $\sin = G/H$ = Gegenkathete durch Hypothenuse usw.

Auch zu merken mit:

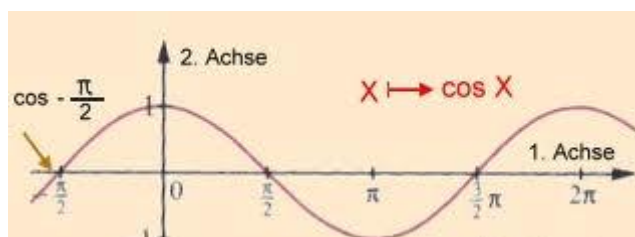
Gustav Hausers alte Hennen gackern am Abend gerne

➔ Immer Zähler – Nenner – Zähler – Nenner usw.

Sinuskurve:



Cosinuskurve:



Kugel

Innen hat die Kugelei

$\frac{4}{3} \pi$ mal r hoch drei,

und was sie auf dem Buckel hat,

ist 4 mal π mal r Quadrat.

Allgemeine Sätze

Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen!