Daniel Wachter

Der Mohr’sche Kreis

Haftungshinweis

Diese Angaben basieren auf den Vorlesungen von Prof. Dr. Jürg Dual und Prof. Dr. Edoardo Mazza an der ETH Zürich. Für die Richtigkeit wird keine Garantie ausgesprochen, auch ist dieses Dokument nicht von der ETH Zürich zertifiziert, es gibt lediglich die Auffassungen und das Verständnis des verfassenden Studenten wieder.

Inhaltsverzeichnis

Mohr’scher Spannungskreis

Ausgangslage (Ebener Spannungszustand)

Für ein Flächenelement lässt sich der Spannungsvektor s in einen Normalspannungsvektor σ und einen Schubspannungsvektor τ zerlegen.

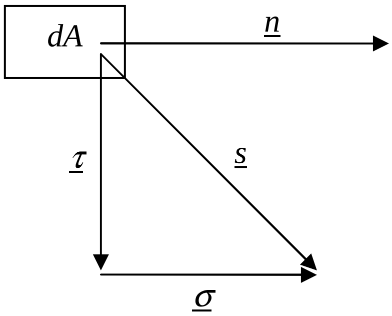

Abbildung 1: Spannungsvektor

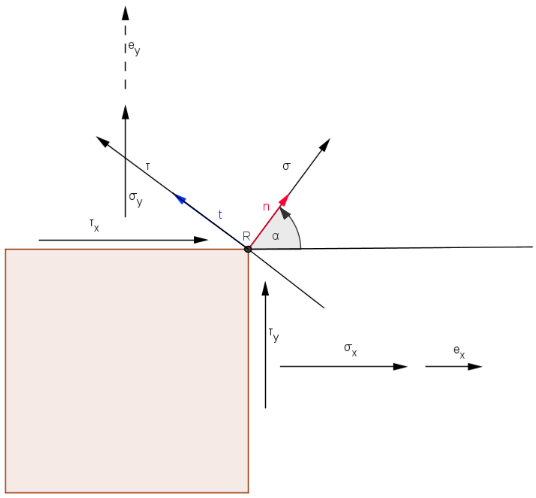

Abbildung 2: Zusammenhang der verschiedenen Grössen

Wozu dient der Mohr’sche Spannungskreis?

Der Mohr’sche Spannungskreis dient dazu, Normal- und Schubspannungen geometrisch darstellen zu können.
Die Angaben können dem Spannungstensor 2. Grades entnommen werden:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Daraus lässt sich folgende Zeichnung in der XY-Ebene ableiten (analog für XZ- und YZ-Ebene):

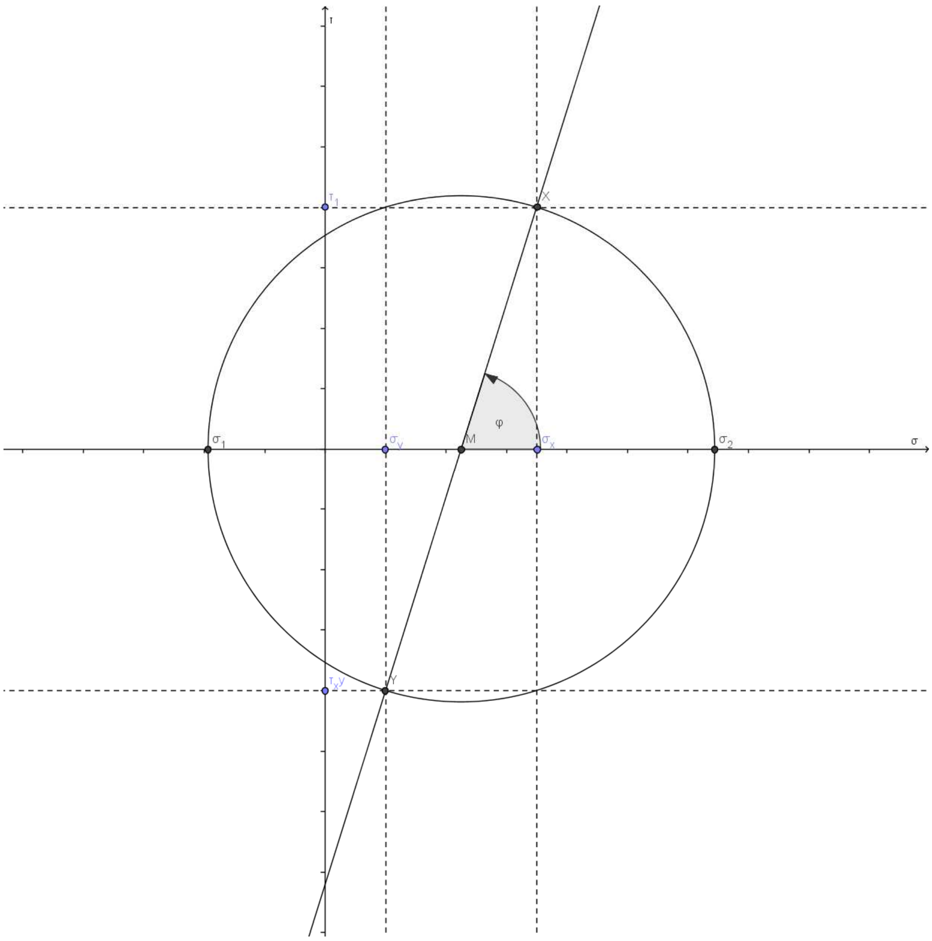

Abbildung 3: Mohr'scher Spannungskreis, bei σ_z als gegebene Hauptspannung

WICHTIG:
Der Tensoren-Spaltenvektor vor der Hauptspannung ist negativ, derjenige nach der Hauptspannung positiv, dementsprechend müssen die Einträge auf der τ_{xy}-Achse negativ oder positiv sein. Sie sind dann punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des

Mohr'schen Kreises. Im obigen Beispiel ist σ_z bereits aus dem Tensor als Hauptspannung identifizierbar, so dass für σ_y ein negatives τ_{xy} resultiert, für σ_x ein positives. Der Punkt Y erreicht man, in dem man von der Position σ_Y der X-Achse um den Wert τ_{XY} die Y-Achse hinuntergeht, den Punkt X analog von σ_X in die Gegenrichtung der Y-Achse. Durch die Verbindung von X und Y erhält man den Mittelpunkt und auch den Radius. Die Hauptspannung σ_1 erreicht man, in dem man vom Punkt X aus im Gegenuhrzeigersinn bis zum Schnittpunkt Kreis/X-Achse geht, analog funktioniert das mit σ_2 und σ_3.

Wissenswertes zum Mohr'schen Kreis

Der Winkel φ zwischen der XY-Verbindungslinie und der X-Achse entspricht dem Doppelten des Winkels, um den das Koordinatensystem gedreht wurde (Winkel α in Abb. 2)

Beim hydrostatischen Druck existiert keine Schubspannung τ, so dass sich der Mohr'sche Spannungskreis auf einen Punkt reduziert. Treten hingegen nur Schubspannungen auf, so befindet sich der Kreismittelpunkt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems.

Ingesamt existieren drei Spannungskreise, welche sich um σ_1, σ_2 und σ_3 drehen. Der rote Kreis dreht sich um σ_1, der grüne um σ_2 und der blaue σ_3, da die Hauptspannungen, um die sich der betreffende Kreis dreht, sich nicht auf diesem Kreis befinden.

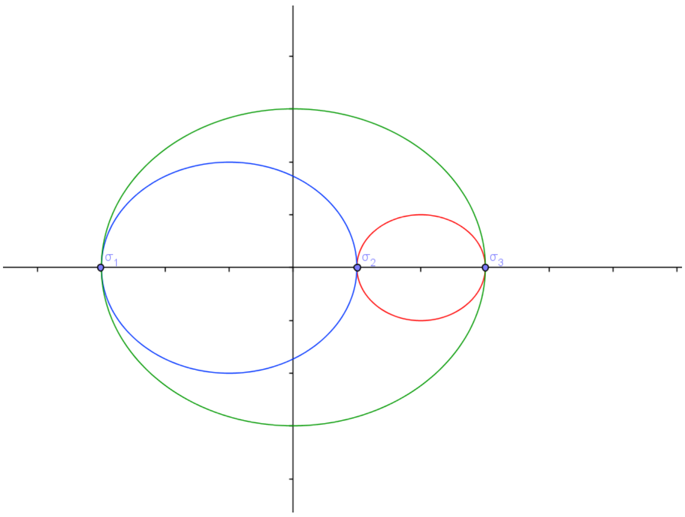

Abbildung 4: Die drei Mohr'schen Spannungskreise

Anwendungen des Mohr'schen Kreises:

- Im Ebenen Spannungszustand kann der MK direkt angewendet werden
- Im räumlichen Spannungszustand ist eine Hauptspannung ≠ 0 bekannt, dann werden die Angaben mithilfe des Spannungstensors bestimmt.

  Der Tensor weist dann folgende Form auf:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

  Hier lässt sich bereits σ_z als Hauptspannung σ_3 herauslesen, da im Spaltenvektor $\underline{\varepsilon}_z$ keine Schubspannung vorhanden ist.

  Sollte der Tensor nicht dieser Form entsprechen, ist zyklisches Vertauschen notwendig, bis der obige Zustand erreicht wird.

Zusammenhänge zwischen den Formeln:

$\underline{s} = \underline{\underline{T}} \bullet \underline{n}$ (Endresultat ist ein Vektor)

$\sigma = \underline{s} \bullet \underline{n}$ (Endresultat ist ein Skalar)

$\tau = \left| \underline{s} - \sigma \bullet \underline{n} \right|$ (Endresultat ist ein Skalar)

Mohr'scher Verzerrungskreis

Der Mohr'sche Kreis kommt auch bei den Verzerrungen zum Einsatz, dort bekannt als Mohr'scher Verzerrungskreis. Das Vorgehen entspricht demjenigen des Mohr'schen Spannungskreises, die Abszisse wird mit ε_x beschriftet, die Ordinate mit ε_{xy}, analog ε_y, ε_z bzw. ε_{yz}, ε_{xz}. Anstelle des Spannungstensors werden die Angaben hier aus dem Verzerrungstensor entnommen:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$